Quelques exercices de théorie des jeux

(ces exercices, sauf le premier, proviennent d'un polycopié d'exercices écrit par François Marini et Françoise Forges, pour un cours dans un master d'économie de Dauphine.)

Exercice 1 (un duel)

a) Duel au pistolet bruyant à une balle

Deux personnes se battent en duel. Les duellistes ont chacun une balle dans leur pistolet. Ils marchent l'un vers l'autre à une vitesse constante et , en partant au coup de sifflet à $t = 0$, ils devraient se rencontrer à $t = 1$. Si le joueur i tire sur j à l'instant t, il le touche avec une probabilité $p_i(t)$; $p_i(t)$ est supposé strictement croissante, continue, et telle que $p_i(0) = 0$, $p_i(1) = 1$. Le paiement du joueur i est 1 s'il touche son adversaire avant d'être touché, -1 dans le cas symétrique et 0 si aucun n'est touché ou s'ils sont touchés au même instant.

Si l'autre a déjà tiré (et n'a donc plus de balles), le mieux est d'attendre $t = 1$ pour tirer, afin d'être sûr de faire mouche. On ne s'intéressera donc qu'à des stratégies du type "tirer à l'instant $t = a_i$ si l'autre n'a pas tiré avant a_i, tirer à l'instant $t = 1$ sinon", où $a_i \in [0, 1]$.

1) Représenter cette situation comme un jeu sous forme normale à somme nulle. Déterminer les fonctions de paiements.

2) Montrer que ce jeu a une valeur et que la stratégie optimale des deux joueurs est de tirer à t^* défini par $p_1(t^*) + p_2(t^*) = 1$.

b) Duel au silencieux, à une balle.

La situation est identique sauf que les duellistes, munis de silencieux, ne peuvent pas savoir si leur adversaire a déjà tiré (si bien qu'une stratégie du type "tirer à l'instant $t = a_i$ si l'autre n'a pas tiré avant, tirer à l'instant $t = 1$ sinon" n'est plus réalisable). Représenter cette situation par un jeu sous forme normale. Montrer que ce jeu n'a pas de valeur (en stratégies pures).

On pourra montrer tout d'abord que s'il y a un équilibre (en stratégie pures), alors dans cet équilibre, les deux joueurs tirent au même moment, puis montrer qu'il n'y a aucun équilibre (en stratégies pures).

Exercice 2

Le jeu se joue entre André et Betsy, avec l'aide d'un meneur de jeu. Celui-ci tire à pile ou face une pièce biaisée qui tombe sur "face" 8 fois sur 10. Ce biais est connu des joueurs (connaissance commune).

Le meneur de jeu qui s'est isolé pour effectuer son tirage n'informe qu'André du résultat. André annonce ensuite à Betsy "pile" ou "face" (il peut ne pas dire la vérité). Betsy doit alors deviner et annoncer le vrai résultat du tirage au sort.

Les utilités des joueurs, après coup, sont définies de la manière suivante :

1) Betsy reçoit 10, si elle devine correctement, et 0 si elle se trompe.

2) Le gain d'André est la somme de deux montants :

· Il reçoit 20 si Betsy a annoncé "face" et 0 sinon.

· Il reçoit 10 s'il dit la vérité, et 0 dans le cas contraire.

1. Représenter le jeu sous forme extensive et sous forme stratégique.

2. Vérifier si le jeu a des équilibres de Nash en stratégies pures et, si c'est le cas, les déterminer.

Exercice 3

On considère le jeu sous forme stratégique suivant :

		Joueur 2	
		G	D
Joueur 1	G	$0,2$	$3,0$
	D	$2,1$	$1,3$

1. Déterminer les correspondances de meilleure réponse de chacun des deux joueurs.
2. Montrer qu'il existe un seul équilibre de Nash en stratégies complètement mixtes et qu'il peut être déterminé en utilisant le fait que la stratégie d'équilibre de Nash de chaque joueur doit rendre l'autre joueur indifférent entre les stratégies pures auxquelles il affecte une probabilité positive. Calculer le paiement espéré de chacun des joueurs à l'équilibre.

Exercice 4

On considère N fermiers qui peuvent chacun produire à un coût nul autant de blé qu'ils le désirent. Si le $k^{ème}$ fermier produit q_k, la quantité totale produite est $Q = q_1 + q_2 + ... + q_N$. Le prix du blé est déterminé par $p = e^{-Q}$.

1. Faire le tableau de variation de la fonction $f(x) = xe^{-x}$ pour $x \geq 0$.
2. En utilisant le point précédent, montrer que la stratégie qui consiste à produire une unité de blé est dominante pour chaque fermier. En déduire que le profit correspondant d'un fermier est e^{-N}.
3. Supposons que les fermiers se mettent d'accord pour que chacun produise $\frac{1}{N}$ unité de blé. Toujours en se basant sur le premier point, montrer que le profit total est alors maximal. Vérifier que le profit de chaque fermier est $\frac{1}{eN}$. Un tel accord peut-il être respecté en l'absence d'un contrat explicite ?
4. Pourquoi ce jeu à N joueurs est-il une généralisation du dilemme du prisonnier ?

Remarque : Ce jeu est une illustration de la "tragédie des communaux".

Exercice 5

Deux employés travaillent en équipe. L'employé i fait un effort e_i ($i = 1, 2$). La production de l'équipe, mesurée en euros, est $y = e_1 + e_2$ et est divisée à égalité entre les deux employés. L'effort engendre une désutilité de $\frac{1}{2}e_i^2$.

1. Un planificateur social cherche à maximiser la somme des utilités des deux employés. Quels efforts leur demande-t-il ?
2. Vérifier que le jeu auquel jouent les employés a un seul équilibre de Nash en stratégies pures. Le déterminer et le comparer à l'optimum social.
3. Comment ce problème d'équipe est-il relié à la "tragédie des communaux" (Exercice 4) ?

Exercice 6

Des consommateurs i ($i = 1, ..., n$) déterminent simultanément la quantité de monnaie p_i qu'ils consacrent à l'élaboration d'un bien public. L'utilité du consommateur i est :

$$u_i(p_1, ..., p_n) = g\left(\sum_{i=1}^{n} p_i\right) - p_i$$

On suppose que g satisfait : $g(0) = 0$, $g' > 0$, $g'(0) > 1$, $g'' < 0$, $\lim_{x \longrightarrow +\infty} g'(x) = 0$ (exemple : $g(x) = 2\ln(1 + x)$, $x \geq 0$).

1. Montrer qu'il existe une infinité d'équilibres de Nash ; déterminer l'équilibre symétrique.
2. Montrer que, dans tout équilibre, la somme consacrée au bien public est sous-optimale.

Exercice 7

Deux joueurs 1 et 2 négocient la façon dont ils vont se répartir un gâteau de taille 1. A la date 0, le joueur 1 fait une offre x_0 au joueur 2. Si le joueur 2 accepte, alors le partage est x_0 pour le joueur 1 et $1 - x_0$ pour le joueur 2. Si le joueur 2 refuse, il fait une offre de x_1 au joueur 1 à la date 1. Si le joueur 1 accepte, le partage est x_1 pour le joueur 1 et $1 - x_1$ pour le joueur 2 ; sinon, le joueur 1 fait une nouvelle offre au joueur 2 à la date 2, et ainsi de suite. Lorsqu'un joueur est indifférent entre accepter et refuser une offre, il l'accepte. Les coefficients d'escompte psychologique pour les joueurs 1 et 2 sont respectivement δ_1 et δ_2. Si les deux joueurs acceptent le partage $(x_t; 1 - x_t)$ à la date t, leurs utilités respectives sont $\delta_1^t x_t$ et $\delta_2^t(1 - x_t)$.

Montrer que lorsque les joueurs peuvent marchander pendant un nombre fini T d'étapes, il existe un seul équilibre de Nash parfait ; le déterminer.

Exercice 8

Soit un marché où deux entreprises produisent un bien homogène. Comme dans le duopole de Cournot les stratégies sont les quantités produites par chaque entreprise, mais le jeu se déroule en deux étapes. À la première étape, l'entreprise 1 choisit la quantité q_1, puis à la seconde étape, après avoir observé q_1, l'entreprise 2 choisit q_2. Le fait que l'entreprise 1 choisit sa production en premier lieu, i.e., est "leader", constitue une donnée de la situation.

La fonction de demande inverse à la branche est : $p(q_1 + q_2) = a - (q_1 + q_2)$. La fonction de coût est la même pour les deux entreprises : $C(q) = cq$ avec $0 < c < a$.

1. Représenter le jeu sous forme extensive.
2. Déterminer l'équilibre de Nash parfait (aussi appelé "équilibre de Stackelberg").
3. Comparer les profits des deux entreprises dans le jeu en deux étapes et celui où elles choisissent leurs quantités simultanément (duopole de Cournot).

Exercice 9

Un actif détenu par deux joueurs fructifie au cours du temps. À la date j, sa valeur est v_j. Les joueurs ont, alternativement, la possibilité de liquider leur actif, ou de le laisser fructifier. Ils sont d'accord sur le fait que celui qui liquide l'actif a droit à $2/3$ de sa valeur. Si l'actif n'a pas été vendu avant la période K, le joueur qui doit jouer à la période K liquide l'actif.

On suppose que l'actif vaut 300 initialement et que sa valeur est multipliée par 1,1 à chaque période.

1. Représenter le jeu sous forme extensive pour $K = 4$.
2. Déterminer l'équilibre de Nash parfait de ce jeu ; discuter ses propriétés.

Exercice 10

Trois entreprises sont en concurrence monopolistique sur le marché d'un bien différencié. Elles choisissent leur prix simultanément ; la demande des consommateurs à l'entreprise i ($i = 1, 2, 3$) est $q_i = 100 - 3p_i + \sum_{j \neq i} p_j$ (où p_i est le prix choisi par l'entreprise i). Les coûts de production sont supposés nuls.

1. Déterminer l'équilibre de Nash du jeu (qui définit les stratégies "non-coopératives").
2. Déterminer les stratégies et les profits de la solution "coopérative" (dans laquelle les entreprises maximisent ensemble la somme de leurs profits).
3. On suppose à présent que le jeu est répété à l'infini. On note δ_i le facteur d'escompte de l'entreprise i. L'utilité de l'entreprise i pour une suite de profits futurs correspond à la somme de ses profits actualisés. Décrire, à partir des points précédents, une stratégie de "déclic" pour chaque entreprise.
4. Montrer qu'il existe des valeurs de δ_i ($i = 1, 2, 3$) pour lesquelles "coopérer à chaque étape" est le résultat d'un équilibre parfait du jeu infiniment répété ; déterminer les stratégies et les valeurs possibles pour δ_i ($i = 1, 2, 3$).

Exercice 11

Deux individus 1 et 2 possèdent un terrain en commun. Ils décident de rompre leur association et que l'un des deux achète la terre de l'autre. Chacun connaît la valeur qu'il attache lui-même au terrain (notée v_i pour l'individu i, $i = 1, 2$) mais ne connaît pas la valeur que l'autre y attache. Chacun fait une offre (notée b_i pour l'individu i, $i = 1, 2$) et celui qui a fait l'offre la plus élevée obtient le terrain et paie le montant de son offre à l'autre. L'utilité du joueur 1 est $u_1 = v_1 - b_1$ s'il obtient le terrain et $u_1 = b_2$ s'il le perd. De même, l'utilité du joueur 2 est $u_2 = v_2 - b_2$ s'il obtient le terrain et $u_2 = b_1$ s'il le perd. Chaque joueur croit que l'évaluation de l'autre est distribuée uniformément sur $[0;1200]$.

Démontrer que les stratégies $b_1 = \frac{v_1}{3}$, $b_2 = \frac{v_2}{3}$ forment un équilibre de Nash du jeu.

Exercice 12

François a truqué une pièce de monnaie, de sorte que la probabilité de pile est $p \in \,]0, 1[$. On aimerait connaître la valeur de p. Pour cela, on propose à François la procédure suivante :

- François annonce une valeur $q \in [0, 1]$
- puis on lance la pièce : si le résultat est pile, on lui donne q, sinon on lui donne $1 - q$

François cherche à maximiser l'espérance de son gain.

1. Va-t-il dire la vérité (i.e., annoncer p) ? Sinon, quelle valeur va-t-il annoncer ?
2. Même question si sa récompense est $\ln q$ si pile et $\ln(1 - q)$ si face.

Corrigé de certains exercices

Exercice 2

1. Forme extensive : voir appendice, à la fin du corrigé.

Forme stratégique : André choisit une ligne, Betsy, une colonne. La première (resp., seconde) composante d'une stratégie d'André indique son annonce si la pièce est tombée sur "pile" (resp., "face"). La première (resp., seconde) composante d'une stratégie de Betsy indique son choix si André a annoncé "pile" (resp., "face").

	PP	PF	FP	FF
PP	$2,2$	$2,2$	$22,8$	$22,8$
PF	$10,2$	$26,10$	$14,0$	$30,8$
FP	$0,2$	$4,0$	$16,10$	$20,8$
FF	$8,2$	$28,8$	$8,2$	$28,8$

2. Afin de déterminer les équilibres de Nash en stratégies pures, on remarque d'abord que, pour Betsy (qui choisit une colonne), PP est strictement dominée par FF. En analysant les meilleures réponses respectives, on vérifie que (PP, FP), d'utilités $(22, 8)$ et (FF, PF) d'utilités $(28, 8)$ sont des équilibres.

Exercice 3

1. Soit x (resp., y) la probabilité que le joueur 1 (resp., 2) joue G. La correspondance de meilleure réponse du joueur 1 (en termes de $x \in [0,1]$)

$$\begin{aligned} R_1(y) &= 1 \text{ si } 3-3y > y+1, \text{ i.e., } y < \frac{1}{2} \\ &= 0 \text{ si } y > \frac{1}{2} \\ &= [0,1] \text{ si } y = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Meilleure réponse du joueur 2 (en termes de $y \in [0,1]$)

$$\begin{aligned} R_2(x) &= 1 \text{ si } x+1 > 3-3x, \text{ i.e., } x > \frac{1}{2} \\ &= 0 \text{ si } x < \frac{1}{2} \\ &= [0,1] \text{ si } x = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

2. La représentation graphique (voir appendice, à la fin du corrigé).des correspondances de meilleure réponse montre que $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}$ est le seul équilibre. Les paiements correspondants sont $\frac{3}{2}$ pour le joueur 1 et $\frac{3}{2}$ pour le joueur 2. (Voir dans le cours le raisonnement général qui montre qu'un équilibre de Nash en stratégies mixtes peut être déterminé en utilisant le fait que la stratégie d'équilibre de chaque joueur doit rendre l'autre joueur indifférent entre les stratégies pures auxquelles il affecte une probabilité positive).

Exercice 4

1. $f(x) = xe^{-x}$, $x \geq 0$. $f(0) = 0$; $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

$f'(x) = (1-x)e^{-x}$; $f'(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 1$

$f''(x) = (x-2)e^{-x}$; $f''(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 2$

f est croissante jusqu'en $x = 1$, où elle atteint son maximum ; elle est concave jusqu'en $x = 2$, convexe ensuite.

2. Le profit π_k du $k^{ème}$ fermier, en fonction de sa production q_k et de la production des autres fermiers est

$$\pi_k = q_k e^{-(q_k + q_{-k})} = e^{-q_{-k}} q_k e^{-q_k}$$

où $q_{-k} = \sum_{j \neq k} q_j$ est la quantité totale produite par les autres fermiers. Du point de vue du $k^{ème}$ fermier, qui cherche à déterminer q_k pour maximiser π_k, $e^{-q_{-k}}$ apparaît dans π_k comme une constante positive. Autrement dit, *quelle que soit* q_{-k},

$$\arg\max_{q_k} \pi_k = \arg\max_{q_k} q_k e^{-q_k} = 1$$

la seconde égalité résultant du point 1. $q_k = 1$ est donc une stratégie dominante pour le fermier k. Si chaque fermier produit une unité, le prix est e^{-N} et le profit de chacun est e^{-N}.

3. Le profit total est $\sum_{i=1}^{N} \pi_i = Qe^{-Q}$, avec $Q = \sum_{i=1}^{N} q_i$. D'après le premier point, ce profit est maximal en $Q = 1$ et $Q = 1$ est atteint si chacun produit $\frac{1}{N}$ unité de blé. Le profit de chaque fermier est alors $\frac{1}{eN}$. Un tel accord ne peut pas être respecté en l'absence d'un contrat explicite. En effet, quoi que fassent les autres fermiers, le fermier k a intérêt à choisir sa stratégie dominante $q_k = 1$ pour maximiser son profit individuel (si les autres suivent l'accord, le fermier k a $\frac{1}{eN}$ en suivant l'accord et $1.e^{-(\frac{N-1}{N}+1)} > \frac{1}{N}.e^{-(\frac{N-1}{N}+\frac{1}{N})} = \frac{1}{N}.e^{-1}$ en ne le suivant pas, l'inégalité résultant de la croissance de f pour $x \leq 1$).

4. Ce jeu à N joueurs est une généralisation du dilemme du prisonnier car chaque fermier fait un profit plus élevé quand tous respectent l'accord qu'à l'équilibre en stratégies dominantes (en effet, $e^{-N} < \frac{1}{eN}$ car $Ne^{-N} < 1e^{-1}$ par la décroissance de f pour $x \geq 1$). Cependant, l'accord n'est pas "auto-contraignant", ce n'est pas un équilibre.

Exercice 5

L'utilité de l'employé i, en fonction de son effort e_i et de l'effort e_{-i} de l'autre joueur $(-i)$ est $\frac{1}{2}(e_i + e_{-i}) - \frac{1}{2}e_i^2$.

1. Le problème du planificateur social est

$$\max_{e_1, e_2} \left\{ (e_1 - \frac{1}{2}e_1^2) + (e_2 - \frac{1}{2}e_2^2) \right\} = \max_{e_1}(e_1 - \frac{1}{2}e_1^2) + \max_{e_2}(e_2 - \frac{1}{2}e_2^2)$$

$(e_1 - \frac{1}{2}e_1^2) = e_1(1 - \frac{1}{2}e_1)$ est une parabole concave de racines $e_1 = 0$ et $e_1 = 2$, qui atteint donc son maximum en $e_1 = \frac{1}{2}(0 + 2) = 1$. Le planificateur demande donc $e_1 = e_2 = 1$. L'utilité de chaque employé est $\frac{1}{2}$.

2. L'employé 1 considère

$$\max_{e_1} \frac{1}{2}(e_1 + e_2 - e_1^2) = \frac{1}{2}\max_{e_1}(e_1 - e_1^2) + \frac{1}{2}e_2$$

On voit donc que *quel que soit* e_2, l'employé 1 maximise son utilité en choisissant e_1 qui maximise $e_1 - e_1^2 = e_1(1 - e_1)$, parabole concave de racines $e_1 = 0$ et $e_1 = 1$, qui atteint donc son maximum en $e_1 = \frac{1}{2}(0 + 1) = \frac{1}{2}$. $e_1 = \frac{1}{2}$ est donc une stratégie strictement dominante pour l'employé 1. De même, $e_2 = \frac{1}{2}$ est une stratégie strictement dominante pour l'employé 2. A l'équilibre correspondant, l'utilité de chaque employé est $\frac{3}{8}$. Cet équilibre est sous-optimal.

Le problème est que l'employé i ne jouit pas de la totalité du bénéfice social de son action. S'il augmente son effort de Δe_i, il engendre une hausse du surplus social de Δe_i, mais il n'en perçoit que la moitié. Par conséquent, l'incitation à travailler est réduite, et comme le coût marginal de l'effort est croissant avec e_i, les employés travaillent moins.
3. Comme dans l'exercice 4 et le dilemme du prisonnier, on a un unique équilibre de Nash en stratégies strictement dominantes, qui n'est pas Pareto-optimal. Dans la tragédie des communaux, les joueurs ne subissent pas la totalité des coûts sociaux engendrés par leurs actions. Par conséquent, la ressource est sur-exploitée. Dans le problème d'équipe, les employés ne jouissent pas de la totalité du bénéfice social de leurs actions. Par conséquent, ils réduisent leurs efforts.

Exercice 6

1. Considérons le consommateur i. Soit $P_{-i} = \sum_{j \neq i} p_j$ la somme consacrée au bien public par les autres consommateurs. Pour déterminer sa meilleure réponse à P_{-i}, le consommateur i résout $\max_{p_i}\{g(p_i + P_{-i}) - p_i\}$. Les hypothèses sur g montrent que l'objectif est strictement concave, et que le problème de maximisation de i a pour solution l'unique p_i qui satisfait $g'(p_i + P_{-i}) = 1$.

En procédant ainsi pour chaque consommateur, on voit que tout n-uplet $(p_1, ..., p_n)$ tel que $g'(\sum_{i=1}^{n} p_i) = 0$ constitue un équilibre. Dans un équilibre symétrique, $p_1 = ... = p_n = \frac{P}{n}$, avec $P = \sum_{i=1}^{n} p_i$ déterminé par $g'(P) = 0$.
2. La dépense publique optimale P^* maximise la somme des utilités individuelles

$$\sum_{i=1}^{n} u_i(p_1, ..., p_n) = ng(P) - P$$

D'après les hypothèses sur g, le maximum est atteint en P^* tel que $g'(P^*) = \frac{1}{n}$. Comme en tout équilibre de Nash, la dépense totale P satisfait $g'(P) = 0$, et que g' est strictement décroissante, $P^* > P$.

Exercice 7

On procède par induction à rebours. A la dernière période, T, le joueur qui joue en second accepte n'importe quelle offre ≥ 0 car il n'aura plus la possibilité de faire de contre-offre. Le joueur qui fait une offre au début de la période T demande donc la totalité du gâteau. Si T est paire, le joueur 1 propose $(x_T; 1-x_T) = (1; 0)$; si T est impaire, le joueur 2 propose $(x_T; 1-x_T) = (0; 1)$. En particulier, si $T = 0$, le joueur 1 propose $(1; 0)$ et le joueur 2 accepte immédiatement.

Si $T = 1$, le joueur 2 fait la dernière offre : $(x_1; 1-x_1) = (0, 1)$, qui sera acceptée par le joueur 1. A la période 0, le joueur 2 accepte l'offre $(x_0; 1-x_0)$ du joueur 1 si et seulement si $1-x_0 \geq \delta_2(1-x_1) = \delta_2$ (qui correspond à la valeur actualisée à la période 0 de ce que le joueur 2 obtient à l'équilibre du sous-jeu de l'étape 1). Le joueur 1 propose donc $x_0 = 1 - \delta_2$ et le joueur 2 accepte.

Si $T = 2$, le joueur 1 fait la dernière offre : $(x_2; 1 - x_2) = (1, 0)$, qui sera acceptée par le joueur 2 $\Longrightarrow$ à la période 1, le joueur 2 fait l'offre $(x_1; 1 - x_1) = (\delta_1; 1 - \delta_1)$ $\Longrightarrow$ à la période 0, le joueur 1 propose $(x_0; 1 - x_0)$ avec $x_0 = 1 - \delta_2(1 - \delta_1)$.

Si $T = 3$, le joueur 2 fait la dernière offre : $1-x_3 = 1 \Longrightarrow$ le joueur 1 fait l'offre $1-x_2 = \delta_2$ en $t = 2$ $\Longrightarrow$ le joueur 2 fait l'offre $x_1 = \delta_1(1-\delta_2)$ en $t = 1 \Longrightarrow$ le joueur 1 fait l'offre $1-x_0 = \delta_2[1-\delta_1(1-\delta_2)]$ $\Longrightarrow x_0 = 1 - \delta_2[1 - \delta_1(1 - \delta_2)] = (1 - \delta_2)(1 + \delta_1\delta_2)$.

De manière générale, si $k < T$ est impair, l'offre $(x_k; 1-x_k)$ du joueur 2 doit satisfaire $x_k = \delta_1 x_{k+1}$, tandis que si $k < T$ est pair, l'offre $(x_k; 1 - x_k)$ du joueur 1 doit satisfaire $1 - x_k = \delta_2(1 - x_{k+1})$, c'est-à-dire $x_k = 1 - \delta_2(1 - x_{k+1})$.

En procédant inductivement, on trouve par exemple, pour $T = 5$, cas où le joueur 2 fait la dernière offre : $1 - x_5 = 1$, $x_0 = 1 - \delta_2[1 - \delta_1(1 - \delta_2)(1 - \delta_1\delta_2)] = (1 - \delta_2)(1 + \delta_1\delta_2 + \delta_1^2\delta_2^2)$.

Remarquons que les stratégies d'équilibre parfait doivent spécifier *pour chaque étape* $t = 0, ..., T$, l'offre $(x_t; 1 - x_t)$ du joueur qui joue d'abord et la liste des offres qui sont acceptées par le joueur qui joue ensuite. Les cas examinés en détail ci-dessus illustrent que le *résultat* de l'équilibre est que la négociation s'arrête dès l'étape 0, avec, pour T impair, $x_0 = (1-\delta_2)(1+\delta_1\delta_2+\delta_1^2\delta_2^2+...+\delta_1^{\frac{T-1}{2}}\delta_2^{\frac{T-1}{2}})$. Les menaces (crédibles) pour les étapes qui suivraient la période 0 en cas de refus d'offre sont essentielles. Quand $T \longrightarrow \infty$, $x_0 \longrightarrow \frac{1-\delta_2}{1-\delta_1\delta_2}$. En particulier, si $\delta_1 = \delta_2 = \delta$, $x_0 \longrightarrow \frac{1}{1+\delta}$.

Exercice 8

1. Jeu sous forme extensive : voir appendice, à la fin du corrigé.
2. Pour touver les équilibres parfaits éventuels, on commence par considérer le comportement de la seconde entreprise à la seconde étape ; elle doit décider de la quantité q_2 à produire compte tenu de la production q_1 observée pour l'entreprise 1. Sa stratégie est donc une fonction $r_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : q_1 \to r_2(q_1)$. Son profit, en fonction de q_1 et q_2, est $\Pi_2(q_1, q_2) = q_2[a - (q_1 + q_2)] - cq_2 = q_2(a - c - q_1 - q_2)$. C'est une parabole concave de racines 0 et $a - c - q_1$; si $a - c - q_1 \geq 0$, c'est-à-dire si $q_1 \leq a - c$, $\Pi_2(q_1, q_2)$ est maximal pour $q_2 = \frac{a-c-q_1}{2}$; sinon, $q_2 = 0$. La stratégie R_2 qui maximise le profit de l'entreprise 2 à l'étape 2 est donc définie par

$$\begin{aligned} r_2^*(q_1) &= \frac{a-c-q_1}{2} \text{ si } q_1 \leq a - c \\ &= 0 \text{ sinon} \end{aligned}$$

Considérons maintenant l'entreprise 1 à l'étape 1, qui anticipe le comportement de l'entreprise 2 ci-dessus. Si l'entreprise 1 choisit $q_1 > a - c$, l'entreprise 2 répond avec $q_2 = 0$ et le profit de l'entreprise 1 est $q_1(a-c-q_1)$, qui est maximisé par $q_1) = \frac{a-c}{2} < a-c$! Cette contradiction montre qu'on ne peut avoir d'équilibre avec $q_1 > a - c$. Soit donc $q_1 \leq a - c$; en anticipant la réponse $r_2^*(q_1)$ de l'entreprise 2, l'entreprise 1 doit maximiser $\Pi_1(q_1, r_2^*(q_1)) = q_1\frac{a-c-q_1}{2}$, parabole concave de racines 0 et $a - c$. La meilleure réponse de l'entreprise 1 est donc $q_1^* = \frac{a-c}{2}$. L'*équilibre* parfait est décrit par les *stratégies* q_1^* et r_2^* (la stratégie de l'entreprise 2 étant une fonction) ; le *résultat* de cet équilibre, c'est-à-dire les quantités produites par les deux entreprises à l'équilibre, est $q_1^* = \frac{a-c}{2}$, $q_2^* = r_2^*(q_1^*) = \frac{a-c}{4}$. Les profits à l'équilibre sont, respectivement, en posant $a - c = d$, $\Pi_1 = \frac{d}{2}(d - \frac{3}{4}d) = \frac{d^2}{8}$, $\Pi_2 = \frac{d}{4}(d - \frac{3}{4}d) = \frac{d^2}{16}$.
3. Toujours en posant $a - c = d$, les quantités produites par les deux entreprises à l'équilibre de Cournot-Nash, quand elles font leurs choix stratégiques simultanément, sont $\frac{d}{3}$; chacune fait le profit $\Pi_{CN} = \frac{d}{3}(d - \frac{2}{3}d) = \frac{d^2}{9}$. L'entreprise 1 tire donc avantage de sa position de "leader" quand elle décide en premier lieu ($\Pi_1 > \Pi$) tandis que l'entreprise 2 souffre de sa position de "follower" ($\Pi_2 < \Pi$).

Exercice 9

1. Jeu sous forme extensive : voir appendice, à la fin du corrigé.
2. On procède par induction à rebours. Si la dernière étape, $K = 4$, est atteinte, le joueur 2 n'a pas le choix et doit liquider l'actif ; il gagne 266,2 et le joueur 1 a 133,1. En $K = 3$, le joueur 1 peut liquider l'actif et recevoir 242 ou laisser l'actif fructifier jusqu'en $K = 4$, date à laquelle le joueur 2 devra liquider l'actif, avec un profit de 133,1 pour le joueur 1. Le joueur 1 choisit donc de liquider l'actif en $K = 3$. Ce raisonnement se poursuit : en $K = 2$, le joueur 2 préfére liquider et avoir 220 que d'attendre, car la liquidation anticipée en $K = 3$ lui donne 121. Finalement, le joueur 1 liquide en $K = 1$. L'équilibre parfait consiste, pour chaque joueur, à liquider l'actif à chaque

étape. Propriétés : l'équilibre ne comporte pas de menaces non-crédibles, mais les paiements sont sous-optimaux. A cet égard, on a donc une situation comparable à celle du dilemme du prisonnier. Par ailleurs, la rationalité sous-entendue dans le raisonnement par induction à rebours est contestable car un joueur qui l'applique à une étape t, $1 < t < K$, ne tire pas de conclusion du fait que la solution n'a manifestement pas été suivie jusqu'en t.

Exercice 10

1. Les stratégies p_j des entreprises $j \neq i$ étant fixées, l'entreprise i cherche p_i qui maximise $p_i(100 + \sum_{j\neq i} p_j - 3p_i)$. Cette fonction de profit est une parabole concave de racines $p_i = 0$ et $p_i = \frac{100+\sum_{j\neq i} p_j}{3}$; la meilleure réponse p_i de l'entreprise 1 est donc $p_i = \frac{100+\sum_{j\neq i} p_j}{6}$. Un équilibre de Nash (p_1, p_2, p_3) vérifie le système linéaire

$$6p_i = 100 + \sum_{j\neq i} p_j,\ i = 1, 2, 3$$

dont la seule solution est $p_1 = p_2 = p_3 = 25$. A l'équilibre, chaque entreprise produit la quantité $100 + 50 - 75 = 75$ et fait un profit de 1875.
2. La somme des profits des trois entreprises étant une fonction symétrique de p_1, p_2 et p_3, on peut en chercher le maximum pour $p_1 = p_2 = p_3 = p$; on est donc ramené à $\max_p 3p(100 - p)$, soit $p = 50$ (l'objectif étant une parabole concave de racines 0 et 100). Chaque entreprise produit alors la quantité $100 + 100 - 150 = 50$ et fait un profit de 2500. On notera que cette solution "coopérative" nécessite un contrat explicite dans le jeu en une étape, car elle ne correspond pas à un équilibre de Nash.
3. Dans le jeu infiniment répété, une stratégie de "déclic" pour l'entreprise i peut se décrire comme suit : à la première étape, $p_i = 50$ (solution "coopérative") ; à l'étape t ($t = 2, 3, ...$), si à toutes les étapes précédentes $(1, ..., t-1)$, toutes les entreprises (y compris i elle-même) ont choisi 50, $p_i = 50$; sinon (c'est-à-dire si au moins une entreprise j a choisi $p_j \neq 50$ à l'une des étapes $1, ..., t-1$), $p_i = 25$.
4. On va montrer que les stratégies de "déclic" ci-dessus forment un équilibre parfait du jeu infiniment répété pour des valeurs appropriées de δ_i ($i = 1, 2, 3$). Il est clair que le *résultat* de ces stratégies est bien de "coopérer à chaque étape". Pour que ces stratégies soient en équilibre, il faut qu'aucune entreprise n'ait intérêt à en dévier. Imaginons que l'entreprise i choisisse $p_i = 50$ à chaque étape $1, ..., t-1$ mais $p_i \neq 50$ en t, tandis que les entreprises $j \neq i$ suivent leur stratégie de déclic. A l'étape t, l'entreprise i obtient au mieux $\max_{p_i} p_i(200 - 3p_i) = \frac{10000}{3}$ (pour $p_i = \frac{100}{3}$). A chacune des étapes $t + 1$ et suivantes, l'entreprise i obtient au mieux 1875. Ainsi, l'entreprise i ne gagne pas à dévier si

$$\frac{2500}{1-\delta_i} \geq \frac{10000}{3} + \delta_i 1875 + \delta_i^2 1875 + ... = \frac{10000}{3} + \frac{\delta_i}{1-\delta_i} 1875$$

c'est-à-dire si

$$\delta_i \geq \frac{10000 - 7500}{10000 - 5625} = \frac{4}{7}$$

Si les δ_i, $i = 1, 2, 3$, satisfont cette condition, les stratégies de déclic forment un équilibre de Nash. Il reste à vérifier que cet équilibre est parfait. Distinguons deux types de sous-jeux commençant à l'étape $t \geq 2$. Tout d'abord ceux qui font suite à $p_1 = p_2 = p_3 = 50$ pour toute étape $1, ..., t-1$: les stratégies de déclic dans ces sous-jeux étant identiques aux stratégies de déclic dans le jeu initial (qui démarre à l'étape 1), elles sont bien en équilibre. Considérons ensuite les autres sous-jeux, où $p_i \neq 50$ pour au moins une entreprise i à une étape entre 1 et $t-1$: dans ce cas, les stratégies de déclic consistent à jouer l'équilibre de Nash du jeu statique ($p_1 = p_2 = p_3 = 25$) à chaque étape, ce qui constitue bien un équilibre de Nash du sous-jeu infini.

Exercice 11

Par symétrie, on peut se concentrer sur l'individu 1 ; soit v_1 la valeur qu'il attache à la terre. Supposons que l'individu 2 fasse une offre $b_2 = \frac{v_2}{3}$ quand son évaluation est v_2 et cherchons la meilleure réponse de l'individu 1. Pour éviter toute confusion, on note V_i la v.a. représentant l'évaluation de l'individu i, inconnue de l'autre joueur. Si l'individu 1 fait une offre b_1, (la v.a. décrivant) son gain $g_1(v_1, b_1)$ est

$$\begin{aligned} g_1(v_1, b_1) &= v_1 - b_1 \text{ si } b_1 > \frac{V_2}{3} \\ &= \frac{V_2}{3} \text{ sinon} \end{aligned}$$

ce qu'on peut écrire

$$g_1(v_1, b_1) = (v_1 - b_1)I[b_1 > \frac{V_2}{3}] + \frac{v_2}{3}I[b_1 \leq \frac{V_2}{3}]$$

où $I[A]$ désigne l'indicatrice de l'événement A : $I[A] = 1$ si A a lieu, 0 sinon. Le gain espéré de l'individu 1, étant donné son information, est

$$E[g_1(v_1, b_1)|V_1 = v_1] = (v_1 - b_1)E\left(I[b_1 > \frac{V_2}{3}]\right) + E\left(\frac{V_2}{3}I[b_1 \leq \frac{V_2}{3}]\right)$$

grâce à l'indépendance des v.a. V_1 et V_2. En poursuivant le calcul (voir aussi la remarque ci-dessous),

$$\begin{aligned} E[g_1(v_1, b_1)|V_1 &= v_1] = (v_1 - b_1)\Pr(V_2 < 3b_1) + \int_{3b_1}^{1200} \frac{v_2}{3}\frac{1}{1200}dv_2 \\ &= (v_1 - b_1)\frac{b_1}{400} + \frac{1}{1200}\left[\frac{v_2^2}{6}\right]_{3b_1}^{1200} \\ &= 200 + \frac{v_1}{400}b_1 - \frac{3}{800}b_1^2 \end{aligned}$$

L'individu 1 choisira l'offre b_1^* qui maximise ce gain espéré, qui s'écrit comme une fonction concave (parabole) de b_1 ; la condition du premier ordre est $\frac{v_1}{400} - \frac{6}{800}b_1 = 0$, d'où $b_1^* = \frac{v_1}{3}$.

Remarque : une expression équivalente du gain s'obtient en notant que

$$E\left(\frac{V_2}{3}I[b_1 \leq \frac{V_2}{3}]\right) = \Pr(V_2 \geq 3b_1)E\left[\frac{V_2}{3}|\frac{V_2}{3} \geq b_1\right]$$

et que $E\left[\frac{V_2}{3}|\frac{V_2}{3} \geq b_1\right] = \frac{b_1+400}{2}$, comme espérance d'une v.a. uniforme sur $[b_1, 400]$.

Exercice 12.

1) $Max_q\{pq + (1-p)(1-q)\} = Max_q\{(2p-1)q + (1-p)\}$
$2p - 1 > 0 \iff p > \frac{1}{2} \Rightarrow q = 1$
$2p - 1 < 0 \iff p < \frac{1}{2} \Rightarrow q = 0$
$p = \frac{1}{2} \Rightarrow q$ peut prendre n'importe quelle valeur dans $[0, 1]$.

2) $Max_q\{p \ln q + (1-p)\ln(1-q)\}$: on maximise une fonction strictement concave ; la condition du 1er ordre est $\frac{p}{q} + \frac{1-p}{1-q} = 0 \iff p = q$.